2013 年全国高中数学联赛试题（一试+二式）

2013 年全国高中数学联合竞赛一试
试题参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设 8 分和 0 分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次．

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第 9 小题 4 分为一个档次，第 10、11 小题 5 分为一个档次，不要增加其他中间档次．

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分．

1. 设集合 $A=\{2,0,1,3\}$，集合 $B=\{x\mid -x\in A,\ 2-x^2\notin A\}$．则集合 B 中所有元素的和为____________．

答案 -5．

解 易知 $B\subseteq\{-2,0,-1,-3\}$．当 $x=-2,-3$ 时，$2-x^2=-2,-7$，有 $2-x^2\notin A$；而当 $x=0,-1$ 时，$2-x^2=2,1$，有 $2-x^2\in A$．因此，根据 B 的定义可知 $B=\{-2,-3\}$．

所以，集合 B 中所有元素的和为 -5．

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A、B 在抛物线 $y^2=4x$ 上，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$，$F$ 是抛物线的焦点．则 $S_{\triangle OFA}\cdot S_{\triangle OFB}=$____________．

答案 2．

解 点 F 坐标为 $(1,0)$．设 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$，则 $x_1=\dfrac{y_1^2}{4}$, $x_2=\dfrac{y_2^2}{4}$，故

$$-4=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{1}{16}(y_1y_2)^2+y_1y_2,$$

即 $\dfrac{1}{16}(y_1y_2+8)^2=0$，故 $y_1y_2=-8$．

$$S_{\triangle OFA}\cdot S_{\triangle OFB}=\left(\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_1|\right)\cdot\left(\frac{1}{2}|OF|\cdot|y_2|\right)=\frac{1}{4}\cdot|OF|^2\cdot|y_1y_2|=2.$$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A=10\sin B\sin C$, $\cos A=10\cos B\cos C$, 则 $\tan A$ 的值为__________．

答案 11．

解 由于 $\sin A-\cos A=10(\sin B\sin C-\cos B\cos C)=-10\cos(B+C)=10\cos A$，所以 $\sin A=11\cos A$，故 $\tan A=11$．

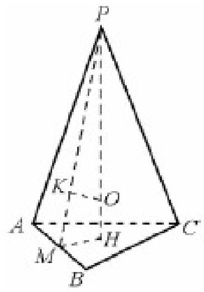
4. 已知正三棱锥 $P-ABC$ 底面边长为 1，高为 $\sqrt{2}$，则其内切球半径为______．

答案 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$．

解 如图，设球心O在面ABC与面ABP内的射影分别为H和K，AB中点为M，内切球半径为r，则P、K、M共线，P、O、H共线，$\angle PHM=\angle PKO=\frac{\pi}{2}$，且

$$OH=OK=r,\ PO=PH-OH=\sqrt{2}-r,$$

$$MH=\frac{\sqrt{3}}{6}AB=\frac{\sqrt{3}}{6},\ \ PM=\sqrt{MH^2+PH^2}=\sqrt{\frac{1}{12}+2}=\frac{5\sqrt{3}}{6},$$



于是有 $$\frac{r}{\sqrt{2}-r}=\frac{OK}{PO}=\sin\angle KPO=\frac{MH}{PM}=\frac{1}{5},$$

解得$r=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

5. 设a,b为实数，函数$f(x)=ax+b$满足：对任意$x\in[0,1]$，有$|f(x)|\le 1$. 则ab的最大值为__________.

答案 $\frac{1}{4}$.

解 易知$a=f(1)-f(0),\ b=f(0)$，则

$$ab=f(0)\cdot(f(1)-f(0))=-\left(f(0)-\frac{1}{2}f(1)\right)^2+\frac{1}{4}(f(1))^2\le\frac{1}{4}(f(1))^2\le\frac{1}{4}.$$

当$2f(0)=f(1)=\pm 1$，即$a=b=\pm\frac{1}{2}$时，$ab=\frac{1}{4}$. 故ab的最大值为$\frac{1}{4}$.

6. 从$1,2,\cdots,20$中任取 5 个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为________.

答案 $\frac{232}{323}$.

解 设$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$取自 1,2，…，20，若a_1,a_2,a_3,a_4,a_5互不相邻，则

$$1\le a_1<a_2-1<a_3-2<a_4-3<a_5-4\le 16,$$

由此知从$1,2,\cdots,20$中取 5 个互不相邻的数的选法与从$1,2,\cdots,16$中取 5 个不同的数的选法相同，即C_{16}^5种. 所以，从$1,2,\cdots,20$中任取 5 个不同的数，其中至少有两个是相邻数的概率为

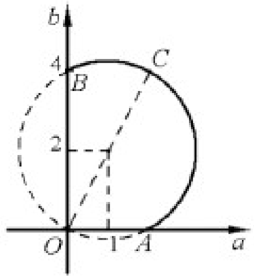
$$\frac{C_{20}^5-C_{16}^5}{C_{20}^5}=1-\frac{C_{16}^5}{C_{20}^5}=\frac{232}{323}.$$

7. 若实数x, y满足$x-4\sqrt{y}=2\sqrt{x-y}$，则x的取值范围是____________.

答案 $\{0\}\cup[4, 20]$.

解 令$\sqrt{y}=a, \sqrt{x-y}=b\,(a, b\geq 0)$，此时$x=y+(x-y)=a^2+b^2$，且条件中等式化为$a^2+b^2-4a=2b$，从而$a, b$满足方程

$$(a-2)^2+(b-1)^2=5\ (a, b\geq 0).$$



如图所示，在aOb平面内，点(a, b)的轨迹是以$(1, 2)$为圆心，$\sqrt{5}$为半径的圆在$a, b\geq 0$的部分，即点O与弧$\widehat{ACB}$的并集．因此$\sqrt{a^2+b^2}\in\{0\}\cup\left[2, 2\sqrt{5}\right]$，从而$x=a^2+b^2\in\{0\}\cup[4, 20]$.

8. 已知数列$\{a_n\}$共有 9 项，其中$a_1=a_9=1$，且对每个$i\in\{1, 2, \cdots, 8\}$，均有$\frac{a_{i+1}}{a_i}\in\left\{2, 1, -\frac{1}{2}\right\}$，则这样的数列的个数为____________.

答案 491.

解 令$b_i=\frac{a_{i+1}}{a_i}\,(1\leq i\leq 8)$，则对每个符合条件的数列$\{a_n\}$，有

$$\prod_{i=1}^{8}b_i=\prod_{i=1}^{8}\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{a_9}{a_1}=1，\text{且}\ b_i\in\left\{2, 1, -\frac{1}{2}\right\}(1\leq i\leq 8). \qquad ①$$

反之，由符合条件①的 8 项数列$\{b_n\}$可唯一确定一个符合题设条件的 9 项数列$\{a_n\}$.

记符合条件①的数列$\{b_n\}$的个数为N．显然$b_i\,(1\leq i\leq 8)$中有偶数个$-\frac{1}{2}$，即$2k$个$-\frac{1}{2}$；继而有$2k$个 2，$8-4k$个 1．当给定k时，$\{b_n\}$的取法有$C_8^{2k}C_{8-2k}^{2k}$种，易见k的可能值只有$0, 1, 2$，所以

$$N=1+C_8^2C_6^2+C_8^4C_4^4=1+28\times 15+70\times 1=491.$$

因此，根据对应原理，符合条件的数列$\{a_n\}$的个数为 491.

二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分）给定正数数列$\{x_n\}$满足$S_n \geq 2S_{n-1}, n=2,3,\cdots$，这里$S_n = x_1+\cdots+x_n$．证明：存在常数$C>0$，使得

$$x_n \geq C\cdot 2^n,\quad n=1,2,\cdots.$$

解 当$n\geq 2$时，$S_n \geq 2S_{n-1}$等价于

$$x_n \geq x_1+\cdots+x_{n-1}. \qquad ①$$

……………………4 分

对常数$C=\frac{1}{4}x_1$，用数学归纳法证明：

$$x_n \geq C\cdot 2^n,\quad n=1,2,\cdots. \qquad ②$$

………………………8 分

$n=1$时结论显然成立．又$x_2 \geq x_1 = C\cdot 2^2$．

对$n\geq 3$，假设$x_k \geq C\cdot 2^k$，$k=1,2,\cdots,n-1$，则由①式知

$$\begin{aligned} x_n &\geq x_1+\left(x_2+\cdots+x_{n-1}\right) \\ &\geq x_1+\left(C\cdot 2^2+\cdots+C\cdot 2^{n-1}\right) \\ &= C\left(2^2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}\right)=C\cdot 2^n, \end{aligned}$$

所以，由数学归纳法知，②式成立．

……………………16 分

10.（本题满分 20 分）在平面直角坐标系xOy中，椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$A_1$、$A_2$分别为椭圆的左、右顶点，$F_1$、$F_2$分别为椭圆的左、右焦点，$P$为椭圆上不同于$A_1$和$A_2$的任意一点．若平面中两个点$Q$、$R$满足$QA_1\perp PA_1$，$QA_2\perp PA_2$，$RF_1\perp PF_1$，$RF_2\perp PF_2$，试确定线段$QR$的长度与$b$的大小关系，并给出证明．

解 令$c=\sqrt{a^2-b^2}$，则$A_1(-a,\ 0), A_2(a,\ 0), F_1(-c,\ 0), F_2(c,\ 0)$．

设$P(x_0,\ y_0), Q(x_1,\ y_1), R(x_2,\ y_2)$，其中$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,\ y_0\neq 0$．

由$QA_1\perp PA_1,\ QA_2\perp PA_2$可知

$$\overrightarrow{A_1Q}\cdot\overrightarrow{A_1P}=(x_1+a)(x_0+a)+y_1y_0=0\,, \qquad ①$$

$$\overrightarrow{A_2Q}\cdot\overrightarrow{A_2P}=(x_1-a)(x_0-a)+y_1y_0=0\,. \qquad ②$$

…………………5 分

将①、②相减，得 $2a(x_1+x_0)=0$，即 $x_1=-x_0$，将其代入①，得 $-x_0^2+a^2+y_1y_0=0$，

故 $y_1=\dfrac{x_0^2-a^2}{y_0}$，于是 $Q\left(-x_0,\dfrac{x_0^2-a^2}{y_0}\right)$. …………………10 分

根据 $RF_1\perp PF_1,\ RF_2\perp PF_2$，同理可得 $R\left(-x_0,\dfrac{x_0^2-c^2}{y_0}\right)$. …………………15 分

因此

$$|QR|=\left|\frac{x_0^2-a^2}{y_0}-\frac{x_0^2-c^2}{y_0}\right|=\frac{b^2}{|y_0|}\,,$$

由于 $|y_0|\in(0,b]$，故 $|QR|\ge b$（其中等号成立的充分必要条件是 $|y_0|=b$，即点 P 为 $(0,\pm b)$）. …………………20 分

11. （本题满分 20 分）求所有的正实数对 (a,b)，使得函数 $f(x)=ax^2+b$ 满足：对任意实数 x,y，有

$$f(xy)+f(x+y)\ge f(x)f(y)\,.$$

解 已知条件可转化为：对任意实数 x,y，有

$$(ax^2y^2+b)+(a(x+y)^2+b)\ge(ax^2+b)(ay^2+b)\,. \qquad ①$$

先寻找 a,b 所满足的必要条件.

在①式中令 $y=0$，得 $b+(ax^2+b)\ge(ax^2+b)\cdot b$，即对任意实数 x，有

$$(1-b)ax^2+b\,(2-b)\ge0\,.$$

由于 $a>0$，故 ax^2 可取到任意大的正值，因此必有 $1-b\ge0$，即 $0<b\le1$.

…………………5 分

在①式中再令 $y=-x$，得 $(ax^4+b)+b\ge(ax^2+b)^2$，即对任意实数 x，有

$$(a-a^2)x^4-2abx^2+(2b-b^2)\ge0\,. \qquad ②$$

将②的左边记为 $g(x)$．显然 $a-a^2\neq 0$（否则，由 $a>0$ 可知 $a=1$，此时 $g(x)=-2bx^2+(2b-b^2)$，其中 $b>0$，故 $g(x)$ 可取到负值，矛盾），于是

$$g(x)=(a-a^2)\left(x^2-\frac{ab}{a-a^2}\right)^2-\frac{(ab)^2}{a-a^2}+(2b-b^2)$$

$$=(a-a^2)\left(x^2-\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$$

对一切实数 x 成立，从而必有 $a-a^2>0$，即 $0<a<1$． …………………10 分

进一步，考虑到此时 $\frac{b}{1-a}>0$，再根据 $g\left(\sqrt{\frac{b}{1-a}}\right)=\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$，可得 $2a+b\leq 2$．

至此，求得 a, b 满足的必要条件如下：

$$0<b\leq 1，\ 0<a<1，\ 2a+b\leq 2． \quad ③$$

…………………15 分

下面证明，对满足③的任意实数对 (a, b) 以及任意实数 x, y，总有①成立，即

$$h(x, y)=(a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(x^2+y^2)+2axy+(2b-b^2)$$

对任意 x, y 取非负值．

事实上，在③成立时，有 $a(1-b)\geq 0,\ a-a^2>0$，$\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0$，再结合 $x^2+y^2\geq -2xy$，可得

$$h(x, y)\geq (a-a^2)x^2y^2+a(1-b)(-2xy)+2axy+(2b-b^2)$$

$$=(a-a^2)x^2y^2+2abxy+(2b-b^2)$$

$$=(a-a^2)\left(xy+\frac{b}{1-a}\right)^2+\frac{b}{1-a}(2-2a-b)\geq 0．$$

综上所述，所求的正实数对 (a, b) 全体为 $\{(a, b)\,|\,0<b\leq 1,\ 0<a<1,\ 2a+b\leq 2\}$．

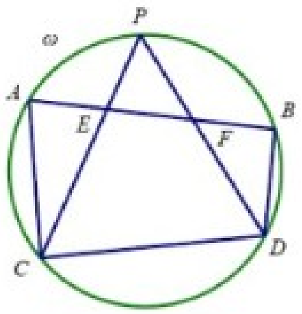
…………………20 分

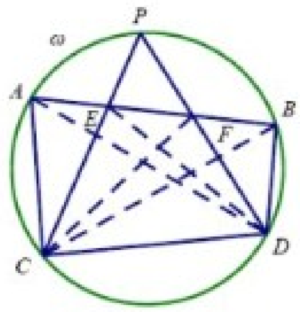
2013年全国高中数学联合竞赛加试
试题参考答案及评分标准

说明：
1. 评阅试卷时，请严格按照本评分标准的评分档次给分.
2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，10分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、（本题满分40分） 如图，AB 是圆 ω 的一条弦，P 为弧 AB 内一点，E、F 为线段 AB 上两点，满足 $AE=EF=FB$．连接 PE、PF 并延长，与圆 ω 分别相交于点 C、D．求证：

$$EF\cdot CD=AC\cdot BD.$$





证明 连接 AD，BC，CF，DE．由于 $AE=EF=FB$，从而

$$\frac{BC\cdot\sin\angle BCE}{AC\cdot\sin\angle ACE}=\frac{\text{点}B\text{到直线}CP\text{的距离}}{\text{点}A\text{到直线}CP\text{的距离}}=\frac{BE}{AE}=2. \quad ①$$

……………………10分

同样

$$\frac{AD\cdot\sin\angle ADF}{BD\cdot\sin\angle BDF}=\frac{\text{点}A\text{到直线}PD\text{的距离}}{\text{点}B\text{到直线}PD\text{的距离}}=\frac{AF}{BF}=2. \quad ②$$

另一方面，由于

$$\angle BCE=\angle BCP=\angle BDP=\angle BDF,$$

$$\angle ACE=\angle ACP=\angle ADP=\angle ADF,$$

故将①，②两式相乘可得 $\dfrac{BC\cdot AD}{AC\cdot BD}=4$，即

$$BC\cdot AD=4AC\cdot BD. \quad ③$$

……………………30分

1

由托勒密定理

$$AD\cdot BC=AC\cdot BD+AB\cdot CD\text{，}\qquad ④$$

故由③，④得 $$AB\cdot CD=3AC\cdot BD\text{，}$$

即 $$EF\cdot CD=AC\cdot BD\text{．}$$ ……………………40 分

二、（本题满分 40 分）给定正整数 u，v．数列$\{a_n\}$定义如下：$a_1=u+v$，对整数$m\geq 1$，

$$\begin{cases}a_{2m}=a_m+u,\\ a_{2m+1}=a_m+v.\end{cases}$$

记$S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m\,(m=1,2,\cdots)$．证明：数列$\{S_n\}$中有无穷多项是完全平方数．

证明 对正整数 n，有

$$\begin{aligned}S_{2^{n+1}-1}&=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2^{n+1}-2}+a_{2^{n+1}-1})\\&=u+v+(a_1+u+a_1+v)+(a_2+u+a_2+v)+\cdots+(a_{2^n-1}+u+a_{2^n-1}+v)\\&=2^n(u+v)+2S_{2^n-1}\text{，}\end{aligned}$$ ……………………10 分

所以
$$\begin{aligned}S_{2^n-1}&=2^{n-1}(u+v)+2S_{2^{n-1}-1}=2^{n-1}(u+v)+2\left(2^{n-2}(u+v)+2S_{2^{n-2}-1}\right)\\&=2\cdot 2^{n-1}(u+v)+2^2S_{2^{n-2}-1}\\&=\cdots=(n-1)\cdot 2^{n-1}(u+v)+2^{n-1}(u+v)\\&=(u+v)n\cdot 2^{n-1}\text{．}\end{aligned}$$ ……………………20 分

设$u+v=2^k\cdot q$，其中 k 是非负整数，q 是奇数．取$n=q\cdot l^2$，其中 l 为满足$l\equiv k-1\pmod 2$的任意正整数，此时$S_{2^n-1}=q^2l^2\cdot 2^{k-1+q\cdot l^2}$，注意到 q 是奇数，故

$$k-1+q\cdot l^2\equiv k-1+l^2\equiv k-1+(k-1)^2=k(k-1)\equiv 0\pmod 2\text{，}$$

所以，S_{2^n-1}是完全平方数．由于 l 有无穷多个，故数列$\{S_n\}$中有无穷多项是完全平方数． ……………………40 分

三、（本题满分 50 分）一次考试共有 m 道试题，n 个学生参加，其中$m,n\geq 2$为给定的整数．每道题的得分规则是：若该题恰有 x 个学生没有答对，则每个答对该题的学生得 x 分，未答对的学生得零分．每个学生的总分为其 m 道题的得分

总和．将所有学生总分从高到低排列为 $p_1 \ge p_2 \ge \cdots \ge p_n$，求 $p_1 + p_n$ 的最大可能值．

解 对任意的 $k=1,2,\cdots,m$，设第 k 题没有答对者有 x_k 人，则第 k 题答对者有 $n-x_k$ 人，由得分规则知，这 $n-x_k$ 个人在第 k 题均得到 x_k 分．设 n 个学生的得分之和为 S，则有

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = S = \sum_{k=1}^{m} x_k(n-x_k) = n\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k^2 .$$

因为每一个人在第 k 道题上至多得 x_k 分，故

$$p_1 \le \sum_{k=1}^{m} x_k . \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 10\text{ 分}$$

由于 $p_2 \ge \cdots \ge p_n$，故有 $p_n \le \dfrac{p_2+p_3+\cdots+p_n}{n-1} = \dfrac{S-p_1}{n-1}$．所以

$$\begin{aligned} p_1 + p_n &\le p_1 + \frac{S-p_1}{n-1} = \frac{n-2}{n-1}p_1 + \frac{S}{n-1} \\ &\le \frac{n-2}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{m} x_k + \frac{1}{n-1}\cdot\left(n\sum_{k=1}^{m} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k^2\right) \\ &= 2\sum_{k=1}^{m} x_k - \frac{1}{n-1}\cdot\sum_{k=1}^{m} x_k^2 . \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 20\text{ 分} \end{aligned}$$

由柯西不等式得

$$\sum_{k=1}^{m} x_k^2 \ge \frac{1}{m}\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)^2 ,$$

于是

$$\begin{aligned} p_1 + p_n &\le 2\sum_{k=1}^{m} x_k - \frac{1}{m(n-1)}\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} x_k\right)^2 \\ &= -\frac{1}{m(n-1)}\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} x_k - m(n-1)\right)^2 + m(n-1) \\ &\le m(n-1) . \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 40\text{ 分} \end{aligned}$$

另一方面，若有一个学生全部答对，其他 $n-1$ 个学生全部答错，则

$$p_1 + p_n = p_1 = \sum_{k=1}^{m}(n-1) = m(n-1) .$$

综上所述，$p_1 + p_n$ 的最大值为 $m(n-1)$． $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 50 分

四、（本题满分 50 分） 设 n, k 为大于 1 的整数，$n < 2^k$．证明：存在 $2k$ 个不被 n 整除的整数，若将它们任意分成两组，则总有一组有若干个数的和被 n 整除．

证明 先考虑 n 为 2 的幂的情形．

设 $n = 2^r$，$r \ge 1$，则 $r < k$．取 3 个 2^{r-1} 及 $2k-3$ 个 1，显然这些数均不被 n 整

除．将这 $2k$ 个数任意分成两组，则总有一组中含 2 个 2^{r-1}，它们的和为 2^r，被 n 整除．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　………………………10 分

现在设 n 不是 2 的幂，取 $2k$ 个数为

$$-1,\ -1,\ -2,\ -2^2,\ \cdots,\ -2^{k-2},\ 1,\ 2,\ 2^2,\cdots,2^{k-1},$$

因为 n 不是 2 的幂，故上述 $2k$ 个数均不被 n 整除．　　　　………………………20 分

若可将这些数分成两组，使得每一组中任意若干个数的和均不能被 n 整除．不妨设 1 在第一组，由于 $(-1)+1=0$，被 n 整除，故两个 -1 必须在第二组；因 $(-1)+(-1)+2=0$，被 n 整除，故 2 在第一组，进而推出 -2 在第二组．

现归纳假设 $1,2,\cdots,2^l$ 均在第一组，而 $-1,-1,-2,\cdots,-2^l$ 均在第二组，这里 $1\le l<k-2$，由于 $(-1)+(-1)+(-2)+\cdots+\left(-2^l\right)+2^{l+1}=0$，被 n 整除，故 2^{l+1} 在第一组，从而 -2^{l+1} 在第二组．故由数学归纳法可知，$1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{k-2}$ 在第一组，$-1,\ -1,\ -2,\ -2^2,\ \cdots,\ -2^{k-2}$ 在第二组．最后，由于

$$(-1)+(-1)+(-2)+\cdots+\left(-2^{k-2}\right)+2^{k-1}=0,$$

被 n 整除，故 2^{k-1} 在第一组．因此 $1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{k-1}$ 均在第一组，由正整数的二进制表示可知，每一个不超过 2^k-1 的正整数均可表示为 $1,\ 2,\ 2^2,\ \cdots,\ 2^{k-1}$ 中若干个数的和，特别地，因为 $n\le 2^k-1$，故第一组中有若干个数的和为 n，当然被 n 整除，矛盾！

因此，将前述 $2k$ 个整数任意分成两组，则总有一组中有若干个数之和被 n 整除．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　………………………50 分