2010年河北省高中数学竞赛

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2011)02－0026－05

一、选择题(每小题6分，共36分)

1. 已知关于 x 的不等式

$$\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\geqslant k$$

有实数解．则实数 k 的取值范围是(　　)．

(A) $(0,2]$　　(B) $(-\infty,0]$

(C) $(-\infty,0)$　　(D) $(-\infty,2]$

2. 将正偶数集合 $\{2,4,\cdots\}$ 从小到大按第 n 组有 $2n-1$ 个数进行分组：

$\{2\},\{4,6,8\},\{10,12,14,16,18\},\cdots\cdots$.

问：2 010 位于第(　　)组中．

(A)30　(B)31　(C)32　(D)33

3. 在四面体 $S-ABC$ 中，三组对棱分别相等，依次为 5、4、x．则 x 的取值范围为(　　)．

(A) $(2,\sqrt{41})$　　(B) $(3,9)$

(C) $(3,\sqrt{41})$　　(D) $(2,9)$

4. 对于任意的整数 $n(n\geqslant 2)$，满足

$$a^n=a+1,\ b^{2n}=b+3a$$

的正数 a 和 b 的大小关系是(　　)．

(A) $a>b>1$　　(B) $b>a>1$

(C) $a>1,0<b<1$　(D) $0<a<1,b>1$

5. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ 的图像的对称中心为(　　)．

(A) $(-1,2)$　　(B) $(1,2)$

(C) $(-1,-2)$　　(D) $(1,-2)$

6. 从满足

$$a_1=a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\geqslant 1)$$

的数列 $\{a_n\}$ 中，依次抽出能被 3 整除的项组成数列 $\{b_n\}$．则 $b_{100}=$(　　)．

(A) a_{100}　(B) a_{200}　(C) a_{300}　(D) a_{400}

二、填空题(每小题9分，共54分)

7. 已知函数 $y=f(x+1)$ 的反函数是 $y=f^{-1}(x+1)$，且 $f(1)=4\ 007$．则

$f(1\ 998)=$______．

8. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的各条棱长均为3，长为2的线段 MN 的一个端点 M 在 AA_1 上运动，另一端点 N 在底面 ABC 上运动．则 MN 的中点 P 的轨迹(曲面)与正三棱柱共顶点 A 的三个面所围成的几何体的体积为______．

9. 已知圆

$$C_1:(x+3)^2+y^2=4,$$

$$C_2:x^2+(y-5)^2=4,$$

过平面内的点 P 有无数多对互相垂直的直线 l_1、l_2，它们分别与圆 C_1、圆 C_2 相交，且被圆 C_1、圆 C_2 截得的弦长相等．则点 P 的坐标为______．

10. 由 $1,2,\cdots,n$ 排列而成的 n 项数列 $\{a_n\}$ 满足：每项都大于它之前的所有项或者小于它之前的所有项．则满足这样条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数为______．

11. 已知二次函数

$$y=ax^2+bx+c\geqslant 0(a<b).$$

则 $M=\dfrac{a+2b+4c}{b-a}$ 的最小值为______．

12. 某家电影院的票价为每张5元，现有10个人，其中5个人手持5元钞票，另外5个人手持10元钞票．假设开始售票时售票处没有钱，这10个人随机排队购票．则售票处不会出现找不开钱的局面的概率是______．

三、解答题(共60分)

13. (10分)已知 a、$b\in[1,3]$，$a+b=4$．求证：

$$\sqrt{10} \leqslant \sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}<\frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

14. (10 分) 如图 1,四棱锥 $P-ABCD$, $PA\perp$平面 $ABCD$, 且 $PA=4$, 底面 $ABCD$ 为直角梯形, $\angle CDA=\angle BAD=90°$, $AB=2$, $CD=1$, $AD=\sqrt{2}$, M、N 分别为 PD、PB 的中点,平面 MCN 与 PA 的交点为 Q.

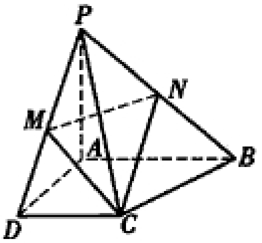

图 1

(1)求 PQ 的长度;

(2)求截面 MCN 与底面 $ABCD$ 所成二面角的大小;

(3)求点 A 到平面 MCN 的距离.

15. (10 分) 设 $a_1=3$, $a_{n+1}=a_n^2+a_n-1$ $(n\in\mathbf{N}_+)$. 证明:

(1)对所有的 n, $a_n\equiv3(\mathrm{mod}\ 4)$;

(2)当 $m\neq n$ 时, $(a_m,a_n)=1$(即 a_m、a_n 互质).

16. (15 分) 如图 2,已知椭圆 C 过点 $M(2,1)$, 两个焦点分别为 $(-\sqrt{6},0)$, $(\sqrt{6},0)$, O 为坐标原点,平行于 OM 的直线 l 交椭圆 C 于不同的两点 A、B.

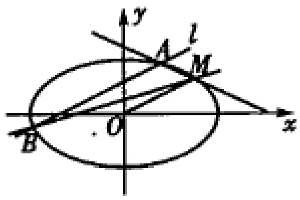

图 2

(1)求$\triangle OAB$ 面积的最大值;

(2)证明:直线 MA、MB 与 x 轴围成一个等腰三角形.

17. (15 分)已知函数

$$f(x)=\frac{1}{2}mx^2-2x+1+\ln(x+1)\ (m\geqslant1).$$

(1)若曲线 C: $y=f(x)$ 在点 $P(0,1)$ 处的切线 l 与 C 有且只有一个公共点,求 m 的值;

(2)求证:函数 $f(x)$ 存在单调递减区间 $[a,b]$,并求出单调递减区间的长度 $t=b-a$ 的取值范围.

参考答案

一、**1.** D.

令 $y=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$ $(0\leqslant x\leqslant2)$. 则

$y^2=x+(2-x)+2\sqrt{x(2-x)}\leqslant4$.

故 $0<y\leqslant2$, 且 $x=1$ 时,上式等号成立.

所以,实数 k 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

2. C.

显然, 2 010 是数列 $a_n=2n$ 的第 1 005 项. 设 2 010 位于第 n 组. 则

$$\sum_{i=1}^{n-1}(2i-1)<1\,005\leqslant\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

$$\Rightarrow(n-1)^2<1\,005\leqslant n^2$$

$$\Rightarrow n=32.$$

故 2 010 位于第 32 组.

3. C.

可将四面体嵌入到长方体中,则四面体的三组对棱分别为长方体的面对角线. 故 5、4、x 为一个锐角三角形的三边长.

所以, $x\in(\sqrt{5^2-4^2},\sqrt{5^2+4^2})$, 即

$x\in(3,\sqrt{41})$.

4. A.

由题意知 $a>1$, $b>1$.

又 $a^{2n}-a=a^2+a+1>3a=b^{2n}-b$, 则

$a>b>1$.

5. B.

因为 $f(x)=(x-1)^3+2$, 所以,函数图像的对称中心为 $(1,2)$.

6. D.

易知 a_{4k} $(k\geqslant1)$ 能被 3 整除,故选 D.

二、**7.** 2 010.

由 $y=f^{-1}(x+1)$, 得 $x+1=f(y)$, 即

$x=f(y)-1$.

则 $y=f^{-1}(x+1)$ 的反函数为 $y=f(x)-1$.

故 $f(x+1)-f(x)=-1$.

令 $x=1,2,\cdots,1\,997$，各式相加并化简得

$f(1\,998)-f(1)=-1\,997$.

所以，$f(1\,998)=2\,010$.

8. $\frac{\pi}{9}$.

由题设知 MN 的中点 P 到点 A 的距离恒为1. 所以，点 P 的轨迹是以 A 为球心、1 为半径的球面在三棱柱内的部分.

故所围成的几何体体积是 $\frac{1}{6}V_{半球}=\frac{\pi}{9}$.

9. $P(1,1)$ 和 $P(-4,4)$.

设 $P(a,b)$，直线 l_1、l_2 的方程分别为

$y-b=k(x-a)$，$y-b=-\frac{1}{k}(x-a)$，

即 $kx-y-ka+b=0$，$x+ky-a-bk=0$.

易得圆心 $C_1(-3,0)$ 到 l_1 的距离与圆心 $C_2(0,5)$ 到 l_2 的距离相等. 则

$$\frac{|-3k-ak+b|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|5k-a-bk|}{\sqrt{k^2+1}},$$

即 $|(3+a)k-b|=|(5-b)k-a|$.

此等式对无数多个 k 成立，故

$$\begin{cases}3+a=5-b,\\ b=a\end{cases}\text{或}\begin{cases}3+a=b-5,\\ b=-5.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=1;\end{cases}\begin{cases}a=-4,\\ b=4.\end{cases}$

故 $P(1,1)$ 和 $P(-4,4)$.

10. 2^{n-1}.

设所求的个数为 A_n. 则 $A_1=1$.

对 $n>1$，若 n 排在第 i 位，则它之后的 $n-i$ 位数完全确定，只能是 $n-i,n-i-1,\cdots,2,1$. 而它之前的 $i-1$ 位，$n-i+1,n-i+2,\cdots,n-1$ 有 A_{i-1} 种排法.

令 $i=1,2,\cdots,n$. 则

$$\begin{aligned}A_n&=1+A_1+\cdots+A_{n-2}+A_{n-1}\\&=(1+A_1+\cdots+A_{n-2})+A_{n-1}\\&=A_{n-1}+A_{n-1}=2A_{n-1}.\end{aligned}$$

由此得 $A_n=2^{n-1}$.

11. 8.

由条件易知 $a>0$，$b^2-4ac\leqslant 0$.

注意到

$$M=\frac{a+2b+4c}{b-a}=\frac{a^2+2ab+4ac}{a(b-a)}\geqslant\frac{a^2+2ab+b^2}{a(b-a)}.$$

令 $t=\frac{b}{a}$. 则 $t>1$. 于是，

$$\begin{aligned}M&\geqslant\frac{a^2+2ab+b^2}{a(b-a)}=\frac{t^2+2t+1}{t-1}\\&=(t-1)+\frac{4}{t-1}+4\\&\geqslant 2\sqrt{4}+4=8.\end{aligned}$$

等号成立的充分必要条件为 $t=3$，$b^2=4ac$，即 $b=3a$，$c=\frac{9}{4}a$.

所以，M 的最小值为8.

12. $\frac{1}{6}$.

考虑手持5元钞票的5个人在队中的位置，共有 $C_{10}^5=252$ 种等机率的排队方式.

设 $p(m,n)$ 表示 m 个手持5元钞票、n 个手持10元钞票的人满足条件的排队方式数.

则 $p(m,0)=1$.

当 $m<n$ 时，$p(m,n)=0$，且

$p(m,n)=p(m,n-1)+p(m-1,n)$.

如图3，$p(5,5)$ 等于从 A 到 B 不能穿过对角线的路径数，即

$p(5,5)=42$.

故所求的概率为 $\frac{42}{252}=\frac{1}{6}$.

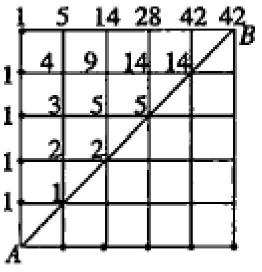

图3

三、**13.** 由 a、$b\in[1,3]$，$a+b=4$，得

$ab=a(4-a)=-(a-2)^2+4\in[3,4]$.

设 $u=\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}$. 则

$$u^2=a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+2\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)}$$

$$=4+\frac{4}{ab}+2\sqrt{ab+\frac{1}{ab}+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}$$

$$=4+\frac{4}{ab}+2\sqrt{ab+\frac{1}{ab}+\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}}$$

$$=4+\frac{4}{ab}+2\sqrt{ab+\frac{17}{ab}-2}.$$

而$\frac{4}{x}$、$x+\frac{17}{x}$在$[3,4]$上均为减函数,则

$$10\leqslant u^2\leqslant\frac{16}{3}+2\sqrt{\frac{20}{3}}<\frac{32}{3}.$$

因此,$\sqrt{10}\leqslant u<\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

14. (1)取AP的中点E,联结ED.则

$ED/\!/CN$.

再取EP的中点即为点Q,由$MQ/\!/ED$,故$MQ/\!/CN$.

所以,M、N、C、Q四点共面,平面MCN与AP的交点Q即为AP的四等分点.

因此,$PQ=1$.

(2)易证平面$MEN/\!/$底面$ABCD$.于是,截面MCN与平面MEN所成的二面角即为截面MCN与底面$ABCD$所成的二面角.

因为$PA\perp$平面$ABCD$,所以,

$PA\perp$平面MEN.

过E作$EF\perp MN$,垂足为F,联结QF.

则由三垂线定理可得$QF\perp MN$.

因此,$\angle QFE$为截面MCN与平面MEN所成二面角的平面角.

在Rt$\triangle MEN$中,

$$ME=\frac{\sqrt{2}}{2},EN=1,MN=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

故$EF=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以,$\tan\angle QFE=\sqrt{3}$.

因此,$\angle QFE=\frac{\pi}{3}$.

(3)因为EP的中点为Q,且平面MCN与PA交于点Q,所以,点A到平面MCN的距离是点E到平面MCN的距离的3倍.

由(2)知$MN\perp$平面QEF.则平面$MCNQ\perp$平面QEF且交线为QF.

作$EH\perp QF$,垂足为H.

则$EH\perp$平面$MCNQ$,EH为点E到平面MCN的距离.

在Rt$\triangle EQF$中,

$$EF=\frac{\sqrt{3}}{3},\angle QFE=\frac{\pi}{3}.$$

故$EH=\frac{1}{2}$.

因此,点A到平面MCN的距离为$\frac{3}{2}$.

15. (1)当$n=1$时,$a_1\equiv3\pmod 4$.

假设$a_n\equiv3\pmod 4$.则

$a_{n+1}=a^2+a-1\equiv3^2+3-1\equiv3\pmod 4$.

所以,对所有的n,有$a_n\equiv3\pmod 4$.

(2)由递推关系易得

$a_{n+1}+1=4a_na_{n-1}\cdots a_1$.

不妨设$m<n$.易得$a_m\mid(a_n+1)$.

令$a_n+1=qa_m(q\in\mathbf{N})$.于是,

$(a_m,a_n)=(a_m,qa_m-1)=(a_m,-1)=1$.

16. (1)设椭圆C的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0).$$

由题意得

$$\begin{cases}a^2-b^2=6,\\ \frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=8,\\ b^2=2.\end{cases}$$

所以,椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1. \quad ①$$

由直线$l/\!/OM$,可设

$$l:y=\frac{1}{2}x+m.$$

将上式代入式①得

$x^2+2mx+2m^2-4=0$.

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.则

$x_1+x_2=-2m,x_1x_2=2m^2-4$.

因为直线l与椭圆C交于不同的两点A、B,所以,

$\Delta=(2m)^2-4(2m^2-4)>0$.

于是,$m\in(-2,2)$,且$m\neq0$.

故$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|m||x_1-x_2|$

$$=\frac{1}{2}|m|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=|m|\sqrt{4-m^2}=\sqrt{m^2(4-m^2)}$$

$$\leqslant 4.$$

当且仅当 $m^2=4-m^2$，即 $m=\pm\sqrt{2}$ 时，上式等号成立.

因此，$\triangle OAB$ 面积的最大值为 4.

(2)设直线 MA、MB 的斜率分别为 k_1、k_2. 则

$$k_1=\frac{y_1-1}{x_1-2}, k_2=\frac{y_2-1}{x_2-2}.$$

下面只需证明：$k_1+k_2=0$.

事实上，

$$k_1+k_2=\frac{\frac{1}{2}x_1+m-1}{x_1-2}+\frac{\frac{1}{2}x_2+m-1}{x_2-2}$$

$$=1+m\left(\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}\right)$$

$$=1+m\cdot\frac{(x_1+x_2)-4}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$$

$$=1+m\cdot\frac{-2m-4}{2m^2-4-2(-2m)+4}=0.$$

故直线 MA、MB 与 x 轴围成一个等腰三角形.

17. (1)注意到函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，

$$f'(x)=mx-2+\frac{1}{x+1}, f'(0)=-1.$$

所以，在切点 $P(0,1)$ 处的切线 l 的斜率为 -1.

因此，切线方程为 $y=-x+1$.

因为切线 l 与曲线 C 有唯一的公共点，所以，方程

$$\frac{1}{2}mx^2-x+\ln(x+1)=0$$

有且只有一个实数解.

显然，$x=0$ 是方程的一个解.

令 $g(x)=\frac{1}{2}mx^2-x+\ln(x+1)$. 则

$$g'(x)=mx-1+\frac{1}{x+1}=\frac{mx\left[x-\left(\frac{1}{m}-1\right)\right]}{x+1}.$$

当 $m=1$ 时，$g'(x)=\frac{x^2}{x+1}\geqslant 0$（只有 $x=0$ 时等号成立），于是，$g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，即 $x=0$ 是方程唯一的实数解.

当 $m>1$ 时，由

$$g'(x)=\frac{mx\left[x-\left(\frac{1}{m}-1\right)\right]}{x+1}=0,$$

得 $x_1=0, x_2=\frac{1}{m}-1\in(-1,0)$.

在区间 $(-1,x_2)$ 上，$g'(x)>0$，在区间 $(x_2,0)$ 上，$g'(x)<0$.

所以，函数 $g(x)$ 在 x_2 处有极大值 $g(x_2)$，且 $g(x_2)>g(0)=0$.

而当 $x\to-1$ 时，$g(x)\to-\infty$，因此，$g(x)=0$ 在 $(-1,x_2)$ 内也有一个解，矛盾.

综上，得 $m=1$.

(2)注意到

$$f'(x)=\frac{mx^2+(m-2)x-1}{x+1}(x>-1).$$

故 $f'(x)<0$

$$\Leftrightarrow h(x)=mx^2+(m-2)x-1<0. \qquad ①$$

因为 $\Delta=(m-2)^2+4m=m^2+4>0$，且对称轴为

$$x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{m}>-1,$$

$$h(-1)=m-(m-2)-1=1>0,$$

所以，方程 $h(x)=0$ 在 $(-1,+\infty)$ 内有两个不同实根 x_1、x_2，即式①的解集为 $(x_1、x_2)$.

故函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[x_1,x_2]$.

则 $t=x_2-x_1=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$$=\sqrt{\frac{\Delta}{m^2}}=\sqrt{1+\frac{4}{m^2}}.$$

又因为 $m\geqslant 1$，所以，$1<\sqrt{1+\frac{4}{m^2}}\leqslant\sqrt{5}$.

从而，函数 $y=f(x)$ 的递减区间长度 t 的取值范围为 $(1,\sqrt{5}]$.

（张生春　提供）