

虹口区 2014 年数学学科高考练习题（理科）

2014.04.09

一、填空题（每小题 4 分，满分 56 分）

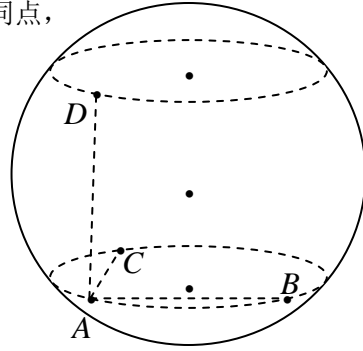
- 1、已知集合 $A = \{x \mid |x-1| < 2\}$, $B = \{x \mid x^2 < 4\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
- 2、函数 $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, ($x \in [-1, 1]$) 的最大值为_____.
- 3、在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{5}$, 则最大角为_____.
- 4、已知函数 $y = f(x)$ 是函数 $y = a^x$ (其中 $a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的反函数, 其图像经过点 (a^2, a) , 则 $f(x) =$ _____.
- 5、复数 z 满足 $\begin{vmatrix} z & i \\ 1 & i \end{vmatrix} = 1 + i$ (其中 i 为虚数单位), 则复数 z 的模为_____.
- 6、已知 $\tan \alpha = 2$, $\tan(\alpha + \beta) = -1$, 则 $\tan \beta =$ _____.
- 7、抛物线 $y^2 = -8x$ 的焦点与双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 的左焦点 F_1 重合, 则双曲线的两条渐近线的夹角为_____.
- 8、某校一天要上语文、数学、外语、历史、政治、体育六节课, 在所有可能的安排中数学不排在最后一节, 体育不排在第一节的概率是_____.
- 9、已知 $(1-2x)^n$ 关于 x 的展开式中, 只有第 4 项的二项式系数最大, 则展开式的各项系数之和为_____.
- 10、等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 8$, 下列四个命题:
- α_1 : 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列; α_2 : 数列 $\{n \cdot a_n\}$ 是递增数列; α_3 : 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递增数列;
- α_4 : 数列 $\{a_n^2\}$ 是递增数列. 其中真命题的序号是_____.
- 11、椭圆 $\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases}$ (其中 $a > b > 0$, 参数 φ 的范围是 $0 \leq \varphi < 2\pi$) 的两个焦点为 F_1, F_2 , 以 $F_1 F_2$ 为边作正三角形, 若椭圆恰好平分正三角形的另两条边, 且 $|F_1 F_2| = 4$, 则 $a =$ _____.

12、如图，设 A, B, C, D 是半径为 1 的球面上的四个不同点，

且满足 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$,

用 S_1, S_2, S_3 分别表示 $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle ABD$ 的面积，

则 $S_1 + S_2 + S_3$ 的最大值为_____.



13、在 $\triangle ABC$ 中， $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$ ，向量 \overrightarrow{AM} 的终点 M 在的内部（不含边界），则实数 m 的取值范围是_____.

14、对于数列 $\{a_n\}$ ，规定 $\{\Delta_1 a_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的一阶差分数列，其中 $\Delta_1 a_n = a_{n+1} - a_n (n \in \mathbb{N}^*)$ ，

对于正整数 k ，规定 $\{\Delta_k a_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的 k 阶差分数列，其中 $\Delta_k a_n = \Delta_{k-1} a_{n+1} - \Delta_{k-1} a_n$. 若数列

$\{a_n\}$ 有 $a_1 = 1, a_2 = 2$ ，且满足 $\Delta_2 a_n + \Delta_1 a_n - 2 = 0 (n \in \mathbb{N}^*)$ ，则 $a_{14} =$ _____.

二、选择题（每小题 5 分，满分 20 分）

15、已知 α ：“ $a = 2$ ”； β ：“直线 $x - y = 0$ 与圆 $x^2 + (y - a)^2 = 2$ 相切”. 则 α 是 β 的（ ）

- A. 充分非必要条件
- B. 必要非充分条件
- C. 充要条件
- D. 既非充分也非必要条件

16、若函数 $f(x) = ax + 1$ 在区间 $(-1, 1)$ 上存在一个零点，则实数 a 的取值范围是（ ）

- A. $a > 1$
- B. $a < -1$
- C. $a < -1$ 或 $a > 1$
- D. $-1 < a < 1$

17、已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 ，公差为 $d (0 < d < 2\pi)$ 的等差数列，若数列 $\{\cos a_n\}$ 是等比数列，则其公比为（ ）

- A. 1
- B. -1
- C. ± 1
- D. 2

18、函数 $f(x) = \sin x$ 在区间 $(0, 10\pi)$ 上可找到 n 个不同的数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ，使得

$$\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} = \frac{f(x_3)}{x_3} = \dots = \frac{f(x_n)}{x_n},$$

则 n 的最大值为（ ）

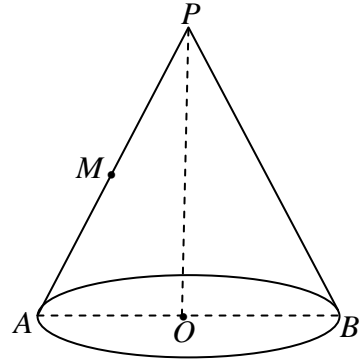
- A. 8
- B. 9
- C. 10
- D. 11

三、解答题（共 5 题，满分 74 分）

19、（本题共 2 小题，满分 12 分）

已知圆锥的母线长为 6，底面半径为 4，点 M 是母线 PA 的中点， AB 是底面圆的直径，底面半径 OC 与母线 PB 所成的角的大小为 θ .

- (1) 当 $\theta = 60^\circ$ 时，求异面直线 MC 与 PO 所成的角；
- (2) 当三棱锥 $M-ACO$ 的体积最大时，求 θ 的值.



20、（本题共 2 小题，满分 14 分）

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x + a (x \in R)$ ，其中 a 为常数.

- (1) 求函数 $y = f(x)$ 的最小正周期；
- (2) 如果 $y = f(x)$ 的最小值为 0，求 a 的值，并求此时 $f(x)$ 的最大值及图像的对称轴方程.

21、（本题共 2 小题，满分 14 分）

某市 2013 年发放汽车牌照 12 万张，其中燃油型汽车牌照 10 万张，电动型汽车 2 万张. 为了节能减排和控制总量，从 2013 年开始，每年电动型汽车牌照按照 50% 增长，而燃油型汽车牌照每一年比上一年减少 0.5 万张，同时规定一旦某年发放的牌照超过 15 万张，以后每一年发放的电动车的牌照的数量维持在这一年的水平不变.

- (1) 记 2013 年为第一年，每年发放的燃油型汽车牌照数构成数列 $\{a_n\}$ ，每年发放的电动型汽车牌照数构成数列 $\{b_n\}$ ，写出这两个数列的通项公式；
- (2) 从 2013 年算起，累计各年发放的牌照数，哪一年开始超过 200 万张？

22、(本题共 3 小题, 满分 16 分)

函数 $y = f(x)$ 的定义域为 R , 若存在常数 $M > 0$, 使得 $|f(x)| \geq M|x|$ 对一切实数 x 均成立, 则称 $f(x)$ 为“圆锥托底型”函数.

- (1) 判断函数 $f(x) = 2x, g(x) = x^3$ 是否为“圆锥托底型”函数? 并说明理由.
- (2) 若函数 $f(x) = x^2 + 1$ 是“圆锥托底型”函数, 求 M 的最大值.
- (3) 问实数 k, b 满足什么条件, $f(x) = kx + b$ 是“圆锥托底型”函数.

23、(本题共 3 小题, 满分 18 分)

如图, 直线 $l: y = kx + b$ 与抛物线 $x^2 = 2py$ (常数 $p > 0$) 相交于不同的两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 且 $|x_2 - x_1| = h$ (h 为定值), 线段 AB 的中点为 D , 与直线 $l: y = kx + b$ 平行的切线的切点为 C (不与抛物线对称轴平行或重合且与抛物线只有一个公共点的直线称为抛物线的切线, 这个公共点称为切点)

- (1) 用 k, b 表示出点 C 、点 D 的坐标, 并证明 CD 垂直于 x 轴;
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积, 证明 $\triangle ABC$ 的面积与 k, b 无关, 只与 h 有关;
- (3) 小张所在的兴趣小组完成上面两个小题后, 小张连 AC, BC , 再作与 AC, BC 平行的切线, 切点分别为 E, F , 小张马上写出了 $\triangle ACE$ 、 $\triangle BCF$ 的面积, 由此, 小张求出了直线 l 与抛物线围成的面积, 你认为小张能做到吗? 请你说明理由.

