

上海市黄浦区 2014 年二模试卷（理科）数学

2014.04.10

一、填空题（每小题 4 分，满分 56 分）

- 1、函数 $f(x) = \log_2 \frac{1+x}{1-x}$ 的定义域为_____.
- 2、函数 $y = \cos^2 x - \sin^2 x$ 的最小正周期 $T =$ _____.
- 3、已知全集 $U = R$, 集合 $A = \{x | x+a \geq 0, x \in R\}$, $B = \{x | |x-1| \leq 3, x \in R\}$, 若 $C_U A \cap B = \{-2\}$, 则实数 a 的取值范围是_____.
- 4、已知等差数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的公差为 3, $a_1 = -1$, 前 n 项和为 S_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{S_n} =$ _____.
- 5、函数 $f(x) = |\log_a x|$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的单调增区间为_____.
- 6、函数 $f(x) = -x^2$ ($x \leq 0$) 的反函数是 $f^{-1}(x)$, 则反函数的解析式 $f^{-1}(x) =$ _____.
- 7、方程 $\log_2(4^x - 3) = x+1$ 的解为 $x =$ _____.
- 8、在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边的长度分别为 a, b, c , 且 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{3}ab$. 则 $\angle C =$ _____.
- 9、已知 $x_1 = 1-i$ (i 为虚数单位, 以下同) 是关于 x 的实系数一元二次方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的一个根, 则 $a =$ _____; $b =$ _____.
- 10、若用一个平面截球体, 所得截面的面积为 16π , 球心到该截面的距离为 3, 则这个球的表面积为_____.
- 11、已知向量 $\vec{a} = (3, -4)$, $\vec{b} = (0, -1)$, 则向量 \vec{a} 在向量 \vec{b} 的方向上的投影是_____.
- 12、直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$ ($t \in R, t$ 是参数), 则直线 l 的一个方向向量是_____ (答案不唯一).
- 13、某个不透明的袋中装有除颜色外其他特征完全相同的 8 个乒乓球 (其中 3 个是白色球, 5 个是黄色球), 小李同学从袋中一个一个地摸乒乓球 (每次摸出球后不放回), 当摸到的球是黄球时停止摸球, 用随机变量 ξ 表示小李同学首先摸到黄色乒乓球时的摸球次数, 则随机变量的数学期望值 $E\xi =$ _____.
- 14、已知函数 $y = f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & 0 \leq x < 2 \\ \log_{16} x, & x \geq 2 \end{cases}$. 若

关于 x 的方程 $[f(x)]^2 + a \cdot f(x) + b = 0 (a, b \in \mathbb{R})$ 有且只有 7 个不同的实数根，则实数 a 的取值范围是_____.

二、选择题 (每小题 5 分, 满分 20 分)

15、已知 $a, b \in \mathbb{R}$, 且 $ab \neq 0$, 则下列结论恒成立的是 ()

- A. $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ B. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$
 C. $\left| \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right| \geq 2$ D. $a^2 + b^2 > 2ab$

16、已知空间 l 直线不在平面 α 内, 则“直线 l 上有两个点到平面 α 的距离相等”是“ $l \parallel \alpha$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 非充分非必要条件

17 已知 $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$, 则直线 $l: ax + by = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 + ax + by = 0$ 的位置关系是 ()

- A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 不能确定

18、给出下列命题:

(1) 已知事件 A, B 是互斥事件, 若 $P(A) = 0.25, P(B) = 0.35$, 则 $P(A \cup B) = 0.60$

(2) 已知事件 A, B 是相互独立事件, 若 $P(A) = 0.15, P(B) = 0.60$, 则 $P(\overline{AB}) = \frac{51}{100}$ (\overline{A} 表示事件 A 的对立事件)

(3) $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{18}$ 的二项展开式中, 共 4 有个有理项

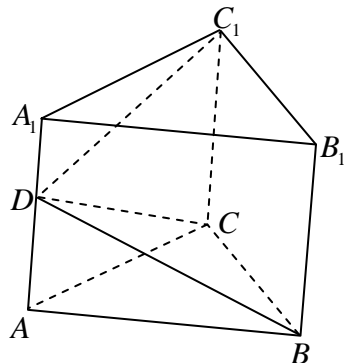
则其中真命题的序号是 ()

- A. (1) (2) B. (1) (2) C. (2) (3) D. (1) (2) (3)

三、解答题 (共 5 题, 满分 74 分)

19、(本题共 2 小题, 满分 12 分)

已知直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle ACB = 90^\circ, AC = BC = 2, AA_1 = 4$, D 是棱 AA_1 的中点, 如图所示:



(1) 求证: $DC_1 \perp$ 平面 BCD ;

(1) 求二面角 $A - BD - C$ 的大小.

20、(本题共 2 小题, 满分 14 分)

已知复数 $z_1 = \cos x + i, z_2 = 1 - i \sin x (x \in R)$

(1) 求 $|z_1 - z_2|$ 的最小值;

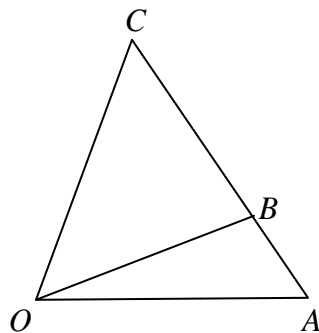
(2) 设 $z = z_1 \cdot z_2$, 记 $f(x) = \text{Im } z$ ($\text{Im } z$ 表示复数 z 的虚部), 将函数 $f(x)$ 的图像上的所有的点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变), 再把所得的图像向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图像, 求函数 $g(x)$ 的解析式.

21、(本题共 2 小题, 满分 14 分)

某通讯公司需要在三角形地带 OAC 区域内建造甲、乙两种通信信号加强中转站, 甲中转站建在区域 BOC 内, 乙中转站建在区域 AOB 内, 分界线 OB 固定, 且 $OB = (1 + \sqrt{3})$ 百米, 边界线 AC 始终过点 B , 边界线 OA, OC 满足 $\angle AOC = 75^\circ, \angle AOB = 30^\circ, \angle BOC = 45^\circ$ 百米, 设 $OA = x (3 \leq x \leq 6)$ 百米, $OC = y$ 百米 (提示: 我们可用型如 $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ 的公式求三角形的面积)

(1) 试将 y 表示为 x 的函数, 并求出函数 y 的解析式;

(2) 当取何值时整个中转站的占地面积最小, 并求出其面积的最小值.



22、(本题共 3 小题, 满分 16 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, a_{2n} = a_{2n-1} + (-1)^n, a_{2n+1} = a_{2n} + 3^n (n \in \mathbb{N}^*)$

- (1) 求 a_3, a_5, a_7 的值;
- (2) 求 a_{2n-1} (用含 n 的式子表示);
- (3) 记数列的前 n 项和为 S_n , 求 S_n (用含有 n 的式子表示).

23、(本题共 3 小题, 满分 18 分)

已知点 $M(x, y)$ 是平面直角坐标系上的一个动点, 点 M 到直线 $x = 4$ 的距离等于点 M 到点 $D(1, 0)$ 的距离的 2 倍. 记动点 M 的轨迹为曲线 C .

- (1) 求曲线 C 的方程;
- (2) 斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两个不同点, 若直线 l 不过点 $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 设直线

PA, PB 的斜率分别为 k_{PA}, k_{PB} , 求 $k_{PA} + k_{PB}$ 的数值;

- (3) 试问: 是否存在一个定圆 N , 与以动点 M 为圆心, 以 MD 为半径的圆相内切? 若存在, 求出这个定圆的方程; 若不存在, 说明理由.