

2014 年上海市普通高中学业水平考试

数学试卷

考生注意：

1. 本试卷共 4 页，满分 120 分，考试时间 90 分钟。
2. 本考试分设试卷和答题纸。试卷包括三大题，第一大题为填空题，第二大题为选择题，第三大题为解答题。
3. 答题前，务必在答题纸上填写姓名、报名号、考场号和座位号，并将核对后的条形码贴在指定位置上。
4. 作答必须涂或写在答题纸上，在试卷上作答一律不得分。第二大题的作答必须涂在答题纸上相应的区域，第一、第三大题的作答必须写在答题纸上与试卷题号对应的位置。

一、填空题（本大题满分 36 分）本大题共有 12 题。考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得 3 分，否则一律得 0 分。

1. 若 $4^x = 16$ ，则 $x =$ _____。
2. 计算： $i(1+i) =$ _____（ i 为虚数单位）。
3. 1、1、2、2、5 这五个数的中位数是_____。
4. 若函数 $f(x) = x^3 + a$ 为奇函数，则实数 $a =$ _____。
5. 点 $O(0, 0)$ 到直线 $x + y - 4 = 0$ 的距离是_____。
6. 函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 的反函数为_____。
7. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1，公差为 2，则该数列的前 n 项和 $S_n =$ _____。
8. 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ ，则 $\cos 2\alpha =$ _____。
9. 已知 $a, b \in \mathbb{R}^+$ 。若 $a + b = 1$ ，则 ab 的最大值是_____。
10. 在 10 件产品中有 3 件次品，从中随机取出 5 件，则恰含 1 件次品的概率是_____（结果用数值表示）。
11. 某货船在 O 处看灯塔 M 在北偏东 30° 方向，它以每小时 18 海里的速度向正北方向航行，经过 40 分钟到达 B 处，看到灯塔 M 在北偏东 75° 方向，此时货船到灯塔 M 的距离为_____海里。
12. 已知函数 $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ 与 $g(x) = mx + 1 - m$ 的图像相交于 A 、 B 两点。若动点 P 满足 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = 2$ ，则 P 的轨迹方程是_____。

二、选择题（本大题满分 36 分）本大题共有 12 题，每题有且只有一个正确答案。考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得 3 分，否则一律得 0 分。

13. 两条异面直线所成的角的范围是 ().

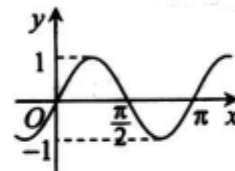
- (A) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ (C) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ (D) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

14. 复数 $2+i$ (i 为虚数单位) 的共轭复数为 ().

- (A) $2-i$ (B) $-2+i$ (C) $-2-i$ (D) $1+2i$

15. 右图是下列函数中某个函数的部分图像, 则该函数是 ().

- (A) $y = \sin x$ (B) $y = \sin 2x$
(C) $y = \cos x$ (D) $y = \cos 2x$



16. 在 $(x+1)^4$ 的二项展开式中, x^2 项的系数为 ().

- (A) 6 (B) 4
(C) 2 (D) 1

17. 下列函数中, 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数的是 ().

- (A) $y = x^2$ (B) $y = |x|$ (C) $y = \sin x$ (D) $y = x^3$

18. $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} =$ ().

- (A) $\cos 2\theta$ (B) $\sin 2\theta$ (C) 1 (D) -1

19. 设 x_0 为函数 $f(x) = 2^x + x - 2$ 的零点, 则 $x_0 \in$ ().

- (A) $(-2, -1)$ (B) $(-1, 0)$ (C) $(0, 1)$ (D) $(1, 2)$

20. 若 $a > b$, $c \in \mathbf{R}$, 则下列不等式中恒成立的是 ().

- (A) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ (B) $a^2 > b^2$ (C) $a|c| > b|c|$ (D) $\frac{a}{c^2+1} > \frac{b}{c^2+1}$

21. 若两个球的体积之比为 $8:27$, 则它们的表面积之比为 ().

- (A) $2:3$ (B) $4:9$ (C) $8:27$ (D) $2\sqrt{2}:3\sqrt{3}$

22. 已知数列 $\{a_n\}$ 是以 q 为公比的等比数列. 若 $b_n = -2a_n$, 则数列 $\{b_n\}$ 是 ().

- (A) 以 q 为公比的等比数列 (B) 以 $-q$ 为公比的等比数列
(C) 以 $2q$ 为公比的等比数列 (D) 以 $-2q$ 为公比的等比数列

23. 若点 P 的坐标为 (a, b) , 曲线 C 的方程为 $F(x, y) = 0$, 则 “ $F(a, b) = 0$ ” 是 “点 P 在曲线 C 上” 的 ().

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

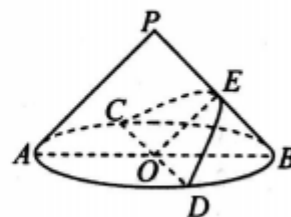
24. 如图, 在底面半径和高均为 1 的圆锥中, AB 、 CD 是底面圆 O 的两条相互垂直的直径,

E 是母线 PB 的中点. 已知过 CD 与 E 的平面与圆锥

侧面的交线是以 E 为顶点的抛物线的一部分, 则该抛

物线的焦点到圆锥顶点 P 的距离为 ().

- (A) 1 (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
(C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{10}}{4}$



三、解答题（本大题满分 48 分）本大题共有 5 题。解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤。

25. （本题满分 7 分）

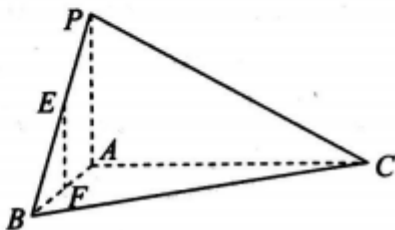
已知不等式 $\frac{x-2}{x+1} < 0$ 的解集为 A ，函数 $y = \lg(x-1)$ 的定义域为集合 B ，求 $A \cap B$ 。

26. （本题满分 7 分）

已知函数 $f(x) = x^2 - 4x + a$ ， $x \in [-3, 3]$ 。若 $f(1) = 2$ ，求 $y = f(x)$ 的最大值和最小值。

27. （本题满分 8 分）

如图，在体积为 $\frac{1}{3}$ 的三棱锥 $P-ABC$ 中， PA 与平面 ABC 垂直， $AP = AB = 1$ ， $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ ， E 、 F 分别是 PB 、 AB 的中点。求异面直线 EF 与 PC 所成的角的大小（结果用反三角函数值表示）。



28. （本题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 9 分。

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 1$) 的左焦点为 F ，上顶点为 B 。

(1) 若直线 FB 的一个方向向量为 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，求实数 a 的值；

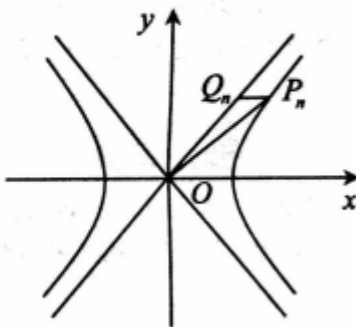
(2) 若 $a = \sqrt{2}$ ，直线 $l: y = kx - 2$ 与椭圆 C 相交于 M 、 N 两点，且 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 3$ ，求实数 k 的值。

29. （本题满分 13 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 5 分，第 2 小题满分 8 分。

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > 0$ ，双曲线 $C_n: \frac{x^2}{a_n} - \frac{y^2}{a_{n+1}} = 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$)。

(1) 若 $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ，双曲线 C_n 的焦距为 $2c_n$ ， $c_n = \sqrt{4n-1}$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 如图，在双曲线 C_n 右支上取点 $P_n(x_n, n)$ ，过 P_n 作 y 轴的垂线，在第一象限内交 C_n 的渐近线于点 Q_n ，联结 OP_n ，记 $\triangle OP_nQ_n$ 的面积为 S_n 。若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 。



（关于数列极限的运算，还可参考如下性质：若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A$ ($u_n \geq 0$)，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{u_n} = \sqrt{A}$ 。）